数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 45-50

$[P, P]$-perfect isometry II

大阪大学大学院理学研究科　楢崎 亮 (Ryo Narasaki)
Graduate School of Sciences,
Osaka University
e-mail: narasaki@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

本講演の前半（$[P, P]$-perfect isometry I）では"fusion が同じ"という事に着目し，Broué の perfect isometry conjecture を拡張した予想（Part I の予想 17）を提案した．また，その予想が成り立つ事が確認されている例として，Sylow p-部分群が位数 p^3，指数 p の extra special p-group p_+^{1+2} である有限群の主 block の場合をあげた．この Part II では，上記の予想が成り立つ事が確認されている他の例として，defect 群が T.I. である block について述べる．また，Part I で使われている記号は Part II でも同じ意味として使用する．(一般的には [12] 参照.）個々の群の名称は [4] の通りである．

1. Blocks with trivial intersection defect groups

有限群 G にたいし，その部分群 H が trivial intersection (T.I.) であるとは，$H \cap H^x = 1$ が全ての $x \in G \setminus N_G(H)$ に対し成り立つときをいう．この章では，defect 群が T.I. である block についてのいくつかの結果を見る．Defect 群が T.I. である block は J. An と C. W. Eaton によって分類されている．

定理 1 ([1], Theorem 1.1). G を有限群，B を G の block で defect 群は T.I. かつ正規でないものとする．このとき，B は以下のどれかに森田同値である．

(a) defect 群が巡回群または generalized quaternion 群である block;

(b) defect 群が Klein-four group である A_n の 2-block，ただし，ある整数 m にたいし，$n = \frac{m^2}{2} + m + 4$ または $n = \frac{m^2}{2} + m + 6$;

(c) defect 群が Klein-four group である J_2 または Ru の block;

(d) defect 群が $C_3 \times C_3$ である $O'N$, $\mathrm{Aut}(O'N)$, $2.Suz$ または $\mathrm{Aut}(Suz)$ の block;

(e) M_{11} の主 3-block;

(f) $3.McL$ または $\mathrm{Aut}(McL)$ の 5-block で defect が最大であるもの;

(g) J_4 の主 11-block;

(h) defect 群が Q_8 である $Sp_{2m}(3)$ の block，ただし，$m \geq 4$;

(i) $Y \leq X \leq \mathrm{Aut}(Y)$ をみたす群 X の p'-中心拡大の p-block で defect が最大であるもの，ただし，$(p, [X:Y]) = 1$ であり，$m > 1$ にたいし，Y は $PSL_2(p^m)$ または $PSU_3(p^m)$．さらに対応する Y の中心拡大は perfect とする;

(j) $Y \leq X \leq \mathrm{Aut}(Y)$ をみたす群 X の 2-block で defect が最大であるもの，ただし，$(2, [X:Y]) = 1$ であり，$m \geq 1$ にたいし，Y は ${}^2B_2(2^{2m+1})$;

(k) $Y \leq X \leq \mathrm{Aut}(Y)$ をみたす群 X の 3-block で defect が最大であるもの，ただし，$(3, [X:Y]) = 1$ であり，$m \geq 1$ にたいし，Y は ${}^2G_2(3^{2m+1})$;

(l) $\mathrm{Aut}({}^2G_2(3)')$ の主 3-block;

(m) ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(2)$ または $\mathrm{Aut}({}^2B_2(2^5))$ の主 5-block;

(n) $Y \leq X \leq \mathrm{Aut}(Y)$ をみたす群 X の $3'$-中心拡大の 3-block で defect が最大であるもの，ただし，$(3, [X:Y]) = 1$ であり，Y は $PSL_3(4)$．さらに対応する Y の中心拡大は perfect とする．

この分類を利用することにより，Part I の予想 17 （と注意 18 (iii)）の一部である次の予想に対する考察が可能になる．

予想 2. B を有限群 G の p-block でその defect 群 P が T.I. であるものとし，B' を $N_G(P)$ の p-block で B と Brauer の第一主定理で対応しているものとする．このとき，$Q \leq Z(P) \cap [P,P]$ をみたす適当な Q に対し，B と B' は Q-perfect isometric であり，このときの Q-perfect isometry は指標の p-defect と p-residue を保つように取れる．

予想 2 の defect 群が T.I. であるという状況は可換なものも多く含まれるため，もともとの Broué's conjecture (Part I の予想 6) の対象である場合も多い．よってこれらの場合に関しては，すでに多くの結果が示されている．ここで，derived equivalence または perfect isometry の存在が証明されている場合とその参考文献を以下にあげる．

- defect 群が巡回群の場合．([17], [11], [19])
- defect 群が generalized quaternion の場合．([2], [6], [7])
- defect 群が $C_2 \times C_2$ の場合．([5], [18])
- defect 群が $C_3 \times C_3$ の主 3-block の場合．([8])
- $O'N$ または Suz の defect 群が $C_3 \times C_3$ の非主 3-block の場合．([9], [10])
- $PSL_2(p^m)$ の主 p-block の場合．([16])

したがって予想 2 の確認のためには，残りの場合を調べればよい．特に G が有限単純群の主 block の場合を以下にあげておく．

(f') McL の主 5-block;
(g') J_4 の主 11-block;
(i') $PSU_3(p^m)$ の主 p-block;
(j') ${}^2B_2(2^{2m+1})$ の主 2-block，ただし $m \geq 1$;
(k') ${}^2G_2(3^{2m+1})$ の主 3-block，ただし $m \geq 1$;
(m') ${}^2F_4(2)'$ の主 5-block;

本講演での結果は以下の通りである．

定理 3. G を有限単純群とし，B を G の主 p-block とする，ただし，p は素数．このとき，予想 2 は成り立つ．

注意 4. (i) 上記の定理で，defect 群が可換な場合には $\{1\}$-perfect isometry の存在を確認した．

(ii) defect 群が非可換でも perfect isometry が存在する例はあるが，上記の例には鈴木群 $Sz(q) = {}^2B_2(2^{2m+1})$ という，Broué's conjecture が defect 群が非可換な場合に一般には成り立たない有名な例が含まれている．([3] を参照．) よってこのような場合には perfect isometry は存在せず，Q-perfect isometry の存在を確認することは意味がある．

(iii) G が単純群でない場合で予想 2 が成り立つ例として，以下のものも確認している．すなわち G が $\mathrm{Aut}({}^2G_2(3)')$, ${}^2F_4(2)$, $\mathrm{Aut}({}^2B_2(2^5))$, $\mathrm{Aut}(McL)$, $SU_3(p^m)$ または $PGU_3(p^m)$ の場合である．

以降の章では，defect 群が T.I. である block に関して，どのように Q-perfect isometry の存在を確認するかを示す．

2. The case of the principal 2-block of $^2B_2(2^{2m+1})$, where $m \geq 1$

$G = Sz(q) = {}^2B_2(2^{2m+1})$ を鈴木群とする，ただし $q = 2^{2m+1}$ $(m \geq 1)$．G の位数は $|G| = q^2(q-1)(q^2+1)$ である．P を G の Sylow 2-部分群とすると，その正規化群 $H = N_G(P)$ は P と位数 $q-1$ の巡回群の半直積となる．このとき P と H の位数は，$|P| = q^2$，$|H| = q^2(q-1)$ である．P の中心 $Z(P)$ は位数 q の基本可換群であり，P の交換子群 $[P, P]$ は $Z(P)$ に等しい．以下，$Q = Z(P)$ とおく．

2.1. Conjugate classes. G の構造は [20] を参照する．G には 7 つのタイプの共役類が存在する； $1, \sigma, \rho, \rho^{-1}, \pi_0, \pi_1, \pi_2$ をそれらの代表元とする．ここで，これら 7 つのタイプに属する共役類の個数はそれぞれ $1, 1, 1, 1, \frac{q-2}{2}, \frac{q+r}{4}, \frac{q-r}{4}$（ただし，$r = \sqrt{2q}$）である．

ここで σ は involution, ρ と ρ^{-1} の位数は 4, π_i $(i = 0, 1, 2)$ は 2-regular 元（位数が 2 と素な元）である．また，それぞれの中心化群の位数は，$|C_G(\sigma)| = q^2$, $|C_G(\rho)| = |C_G(\rho^{-1})| = 2q$, $|C_G(\pi_0)| = q-1$, $|C_G(\pi_1)| = q + \sqrt{2q} + 1$, $|C_G(\pi_2)| = q - \sqrt{2q} + 1$ である．

2.2. Irreducible characters. G の指標表は [20] を参照する．G の主 2-block に属する指標の値は以下の通り．

	1	σ	ρ	ρ^{-1}	π_0	π_1	π_2
1_G	1	1	1	1	1	1	1
X_i $(1 \leq i \leq \frac{q-2}{2})$	q^2+1	1	1	1	$\varepsilon_0^i(\pi_0)$	0	0
Y_j $(1 \leq j \leq \frac{q+r}{4})$	$(q-r+1)(q-1)$	$r-1$	-1	-1	0	$\varepsilon_1^j(\pi_1)$	0
Z_k $(1 \leq k \leq \frac{q-r}{4})$	$(q+r+1)(q-1)$	$-r-1$	-1	-1	0	0	$\varepsilon_2^k(\pi_2)$
W_1	$\frac{r(q-1)}{2}$	$-\frac{r}{2}$	$\frac{ri}{2}$	$-\frac{ri}{2}$	0	1	-1
W_2	$\frac{r(q-1)}{2}$	$-\frac{r}{2}$	$-\frac{ri}{2}$	$\frac{ri}{2}$	0	1	-1

ここで，ε_i は以下のように定義する．G は位数 $q-1$, $q+r+1$, $q-r+1$ の巡回群を部分群として持ち，それらを A_0, A_1, A_2 と書く．A_i $(i = 0, 1, 2)$ の単位元でない代表元を π_i によって表す．また ε_0 を 1 の原始 $(q-1)$ 乗根とする．ξ_0 が A_0 の生成元であるとき，関数 ε_0^i を次で定義する．

$$\varepsilon_0^i(\xi_0^j) = \varepsilon_0^{ij} + \varepsilon_0^{-ij} \qquad \text{for } i = 1, \cdots, \frac{q-2}{2}.$$

このとき，$X_i(\pi_0) = \varepsilon_0^i(\pi_0)$ である．同様に，ε_1 (resp. ε_2) を 1 の原始 $(q+r+1)$ 乗根 (resp. $(q-r+1)$ 乗根) とする．ξ_1 (resp. ξ_2) が A_1 (resp. A_2) の生成元であるとき，関数 ε_1^i と ε_2^i を次で定義する．

$$\varepsilon_1^i(\xi_1^k) = \varepsilon_1^{ik} + \varepsilon_1^{ikq} + \varepsilon_1^{-ik} + \varepsilon_1^{-ikq} \qquad \text{for } i = 1, \cdots, \frac{q+r}{4}.$$

$$\varepsilon_2^i(\xi_2^k) = \varepsilon_2^{ik} + \varepsilon_2^{ikq} + \varepsilon_2^{-ik} + \varepsilon_2^{-ikq} \qquad \text{for } i = 1, \cdots, \frac{q-r}{4}.$$

このとき，$Y_j(\pi_1) = \varepsilon_1^j(\pi_1)$，$Z_k(\pi_2) = \varepsilon_2^k(\pi_2)$ である．

一方，H の指標表は以下の通り．

	1	σ	ρ	ρ^{-1}	π_0
1_H	1	1	1	1	1
φ_l $(2 \le l \le q-1)$	1	1	1	1	$\varepsilon_3^i(\pi_0)$
μ_1	$q-1$	$q-1$	-1	-1	0
μ_2	$(q-1)2^m$	$-\frac{r}{2}$	$\frac{ri}{2}$	$-\frac{ri}{2}$	0
μ_3	$(q-1)2^m$	$-\frac{r}{2}$	$-\frac{ri}{2}$	$\frac{ri}{2}$	0

ここで，ξ_0 を 1 の原始 $(q-1)$ 乗根とすると，ξ_0 が A_0 の生成元であるとき，関数 ε_3^i を次で定義する．

$$\varepsilon_3^i(\xi_0^j) = \varepsilon_3^{ij} \qquad \text{for } i = 1, \cdots, q-2.$$

このとき，$\varphi_l(\pi_0) = \varepsilon_3^l(\pi_0)$（ただし，$2 \le l \le q-1$）である．

2.3. **The value of** $c(P;Q)$. 次に，Q-perfect の条件 (P'2)（Part I の定義 15）で必要な $c(P;Q)$ の値を見る．

$Q \cong 2^{2m+1}$ の指標は q 個の線形指標である:

$$1_Q\ ,\quad \alpha_i\ (1 \le i \le q-1).$$

Q の指標の P への誘導を $\psi = (1_Q)\uparrow_Q^P$，$\phi_i = (\alpha_i)\uparrow_Q^P$ $(1 \le i \le q-1)$ とする．また，P の指標は次のようにかける:

$$1_P\ ,\ \beta_j\ (1 \le j \le q-1)\ \ ,\ \gamma_i\ (1 \le i \le 2(q-1)),$$

ここで，それぞれの指標の次数は $\beta_j(1) = 1$, $\gamma_i(1) = 2^m$ であり，次をみたす．

$$\psi = 1_P + \sum_{j=1}^{q-1} \beta_j\ \ ,\quad \phi_i = 2^m \cdot (\gamma_{2i-1} + \gamma_{2i}).$$

このとき，$X(P;Q)$ は $\mathbb{Z}$ 上，$1_P + \sum_{j=1}^{q-1}\beta_j$, $\gamma_{2i-1}+\gamma_{2i}$ $(1 \le i \le q-1)$ で生成され，一方，$V(P;Q)$ は $\mathbb{Z}$ 上，$\psi, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{q-1}$ で生成される．よって $c(P,Q) = m$ となる．

2.4. **A Q-perfect isometry.** G と H の主 2-block 間の Q-perfect isometry は以下で与えられる．

$$\begin{pmatrix} -1_G \\ X_i, -Y_j, -Z_k \\ W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 1_H,\ \varphi_l \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

ここで上の図式の 2 番目の行では，指標の対応を自由に選んでよい．すなわち，G の一般指標 X_i, $-Y_j$, $-Z_k$ にたいし，対応するものとして 1_H または φ_l がとれ，どのように選んでも Q-perfect isometry がえられる．指標 X_i, $-Y_j$, $-Z_k$ の総数は $\frac{q-2}{2} + \frac{q+r}{4} + \frac{q-r}{4} = q-1$ であり，これは指標 1_H，φ_l の総数と同じであることを注意しておく．

では例として，$G\times H$ の一般指標 μ の値をいくつか計算してみる．ここで isometry（全単射 f と写像 ε の組のこと，Part I の定義 15 を参照）をひとつ固定し，μ を構成しておく．

$$\begin{aligned}\mu(1,1) &= (-1)\cdot 1\cdot(q-1)+(q^2+1)\cdot 1\cdot(\tfrac{q-2}{2})+(-1)\cdot(q-r+1)(q-1)\cdot 1\cdot(\tfrac{q+r}{4})\\ &\quad +(-1)\cdot(q+r+1)(q-1)\cdot 1\cdot(\tfrac{q-r}{4})+(q-1)2^m\cdot(q-1)2^m+(q-1)2^m\cdot(q-1)2^m\\ &= q^3-2q^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(\pi_1,1) &= (-1)\cdot 1\cdot(q-1)+\textstyle\sum_{j=1}^{(q+r)/4}(-1)\cdot(-\varepsilon_1^j(\pi_1))\cdot 1+1\cdot(q-1)2^m+1\cdot(q-1)2^m\\ &= q(2^{m+1}-1)-2^{m+1}\\ &= 2^{m+1}(2^{2m+1}-2^m-1).\end{aligned}$$

ここで，二つ目の等式は $\sum_{j=1}^{(q+r)/4}(\varepsilon_1^j(\pi_1))=-1$ より成り立つ．μ の他の値も同様に計算できる．

これらのもとで，Q-perfect isometry の条件を確認することができる．例えば，$g=\pi_1$，$h=1$ のときの $\mu(g,h)$ が Q-perfect の条件を満たしているかを見てみる．
まず，$\pi_1\notin_G Q$ かつ $1\in_H Q$ より，Q-perfect の条件 (P'2) で必要な $p^{d(\pi_1,1)}$ の値を求める．$C_G(\pi_1)$，$C_H(1)$ それぞれの Sylow 2-部分群 S_1，S_2 が $S_1=\{1\}$，$S_2=P$ ととれるので，

$$\begin{aligned}p^{d(\pi_1,1)} &= \min\{|S_1||S_2|/|(S_1\times S_2)\cap((Q\times Q)\Delta(P))^{(x,y)}|\ :\ (x.y)\in G\times H\}\\ &= |\{1\}||P|/|\{1\}\times P\cap((Q\times Q)\Delta(P))|\\ &= |\{1\}||P|/|\{1\}\times Q|\\ &= 1\cdot q^2/q\\ &= q\end{aligned}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\frac{\mu(\pi_1,1)}{p^{d(\pi_1,1)}} &= \frac{2^{m+1}\cdot(2^{2m+1}-2^m-1)}{q}\\ &= \frac{2^{m+1}\cdot(2^{2m+1}-2^m-1)}{2^{2m+1}}\\ &= \frac{2^{2m+1}-2^m-1}{2^m}\quad\in\frac{1}{2^{c(P,Q)}}R\end{aligned}$$

となり，$\mu(\pi_1,1)$ は Q-perfect の条件を満たしている．ここで，$q=2^{2m+1}$，$2^{c(P,Q)}=2^m$ であり，R の前の分母の 2 のべきとして $c(P,Q)$ という値が必要であることを注意しておく．

以上のことをまとめると，次の結果がえられる．

命題 5. $G={}^2B_2(2^{2m+1})$（ただし $m\geq 1$）とし，$p=2$ とする．P を G の Sylow 2-部分群とする．また，B を有限群 G の主 2-block，B' を $N_G(P)$ の主 2-block とする．このとき，$Q=Z(P)$ に対し，B と B' は Q-perfect isometric であり，このときの Q-perfect isometry は指標の p-defect と p-residue を保つように取れる．

注意 6. ここでは，Q-perfect isometry I として，$I(1_G) = -\mu_1$ となるように選んでいる．このとき，$\mu(1,1)/|C_G(1)| \in R$ となる．しかし，$I'(1_G) = 1_H$ かつ $\mu(1,1)/|C_G(1)| \in R$ となるような Q-perfect isometry I' は存在しない．

Defect 群が T.I. である他の例に関して，詳しくは [13], [14] を参照．また，Sylow p-部分群が位数 p^3，指数 p の extra special p-group p_+^{1+2} である有限群の主 block の場合については，[15] を参照．

REFERENCES

[1] J. An and C. W. Eaton, Blocks with trivial intersection defect groups, *Math. Z.* **247** (2004), 461-486.
[2] M. Cabanes and C. Picaronny, Types of blocks with dihedral or quaternion defect groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **39** (1992), 141-161.
[3] G. Cliff, On centers of 2-blocks of Suzuki groups, *J. Algebra* **226** (2000), 74-90.
[4] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
[5] K. Erdmann, Blocks of tame representation type and related algebras, *Springer Lecture Notes in Math.* **1428** (1990).
[6] T. Holm, Derived equivalent tame blocks, *J. Algebra* **194** (1997), 178-200.
[7] T. Holm, Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type, *J. Algebra* **211** (1999), 159-205.
[8] S. Koshitani and K. Kunugi, Broué's conjecture holds for principal 3-blocks with elementary abelian defect groups of order 9, *J. Algebra* **248** (2002), 575-604.
[9] S. Koshitani, K. Kunugi and K. Waki, Broué's conjecture for non-principal 3-blocks of finite groups, *J. Pure Appl. Algebra* **173** (2002), 177-211.
[10] S. Koshitani, K. Kunugi and K. Waki, Broué's abelian defect group conjecture for the Held group and the sporadic Suzuki group, *J. Algebra* **279** (2004), 638-666.
[11] M. Linckelmann, Derived equivalence for cyclic blocks over a P-adic ring, *Math. Z.* **207(2)** (1991), 293-304.
[12] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1987.
[13] R. Narasaki, Isometries for blocks T.I. Sylow defect groups, preprint, 2007.
[14] R. Narasaki, Isometries for blocks trivial intersection defect groups, Ph. D. Dissertation, Osaka University, 2008.
[15] R. Narasaki and K. Uno, Principal blocks with extra special defect groups of order p^3, preprint, 2007.
[16] T. Okuyama, Derived equivalences in $SL(2,q)$, preprint, 2000.
[17] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, *J. Pure Appl. Algebra* **61(3)** (1989), 303-317.
[18] J. Rickard, Splendid equivalences : Derived categories and permutation modules, *Proc. London Math. Soc. (3)* **72** (1996), 331-358.
[19] R. Rouquier, The derived category of blocks with cyclic defect groups, In *"Derived equivalences for group rings" Springer Lecture Notes in Math.* **1685** (1998), 199-220.
[20] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups, *Annals of Math.* **75** (1962), 105-145.